OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA JUDEȚEANĂ SUCEAVA 12 MARTIE 2011

CLASA a VI-a

1. a) Fie p un număr prim mai mare decât 6. Aflați ultima cifră a lui p^4.

b) Aflați numerele prime p și q știind că $p^4+q^4=29186$.

G. M. nr.10 / 2009

Soluție. **a)** Orice număr prim $p>6$ are $u(p)\in\{1;3;7;9\}\Rightarrow u\left(p^4\right)=1$. Cu $u(p)$ am notat ultima cifră a lui *p*.

b) Dacă $p>6$ și $q>6$, atunci $u\left(p^4\right)=u\left(q^4\right)=1$ și $u\left(p^4+q^4\right)=2$, deci relația din enunț nu poate fi adevărată. Deducem că cel puțin unul din numerele p sau q este mai mic decât 6.

Dacă $p=2\Rightarrow p^4=16\Rightarrow 16+q^4=29186\Rightarrow q^4=29170\Rightarrow$ nu există *p* deoarece $29170\,\vdots\,2$ și $29170\not\vdots\,2^4$.

Dacă $p=3\Rightarrow p^4=81\Rightarrow 81+q^4=29186\Rightarrow q^4=29105\Rightarrow$ nu există *p* deoarece $29105\,\vdots\,5$ și $29105\not\vdots\,5^4$.

Dacă $p=5\Rightarrow p^4=625\Rightarrow 625+q^4=29186\Rightarrow q^4=28561\Rightarrow q^4=13^4\Rightarrow q=13$. Deci numerele căutate sunt 5 și 13.

Barem.

a) p prim și $p>6\Rightarrow u(p)\in\{1;3;7;9\}$ ……………………………………………………………………………..	1p
$u\left(p^4\right)=1$ ……	1p
b) Arată că cel puțin unul din numerele p sau q este mai mic decât 6………………………………………….	1p
Arată că pentru $p=2$ nu există p deoarece $29170\,\vdots\,2$ și $29170\not\vdots\,2^4$ ……………………………………………..	1p
Arată că pentru $p=3$ nu există p deoarece $29105\,\vdots\,5$ și $29105\not\vdots\,5^4$ ……………………………………………..	1p
Arată că pentru $p=3$ avem $q=13$ ………………………………………………………………………………	1p
Deci numerele căutate sunt 5 și 13………………………………………………………………………………..	1p

2. Fie x,y,z numere raționale pozitive astfel încât $\dfrac{2x}{3y+4z}=\dfrac{3y}{2x+4z}=\dfrac{4z}{2x+3y}$. Calculați:

$$(x+3y+2z)\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{3y}+\frac{1}{2z}\right).$$

G.M. nr.5 / 2010

Soluție. $\dfrac{2x}{3y+4z}=\dfrac{3y}{2x+4z}=\dfrac{4z}{2x+3y}=\dfrac{2x+3y+4z}{4x+6y+8z}=\dfrac{1}{2}$.

$\dfrac{2x}{3y+4z}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow 4x=3y+4z\quad(1)$; $\dfrac{3y}{2x+4z}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow 6y=2x+4z\quad(2)$; $\dfrac{4z}{2x+3y}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow 8z=2x+3y\quad(3)$.

Din $(2) \Rightarrow 4z = 6y - 2x$ şi înlocuind în (1) obţinem $4x = 3y + 6y - 2x \Rightarrow 6x = 9y \Rightarrow 2x = 3y$ (4), care înlocuită în (3) ne conduce la $8z = 3y + 3y \Rightarrow 8z = 6y \Rightarrow 4z = 3y$ (5). Din (4) şi $(5) \Rightarrow 2x = 4z \Rightarrow x = 2z$.

Calculăm în funcţie de x şi avem: $(x + 3y + 2z) \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3y} + \frac{1}{2z}\right) = (x + 2x + x) \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2x} + \frac{1}{x}\right) = 4x \cdot \frac{5}{2x} = 10$.

Barem.

$\frac{2x}{3y+4z} = \frac{3y}{2x+4z} = \frac{4z}{2x+3y} = \frac{2x+3y+4z}{4x+6y+8z} = \frac{1}{2}$ …………………………………………………………………………	2p
$\frac{2x}{3y+4z} = \frac{1}{2} \Rightarrow 4x = 3y + 4z$ (1); $\frac{3y}{2x+4z} = \frac{1}{2} \Rightarrow 6y = 2x + 4z$ (2); $\frac{4z}{2x+3y} = \frac{1}{2} \Rightarrow 8z = 2x + 3y$ (3) …………….........	2p
Obţine $2x = 3y$, $4z = 3y$ şi $x = 2z$ ………………………………………………………………………………………	2p
Calculează $(x + 3y + 2z) \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3y} + \frac{1}{2z}\right) = (x + 2x + x) \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2x} + \frac{1}{x}\right) = 4x \cdot \frac{5}{2x} = 10$ ………………………………...	1p

3. Se consideră triunghiurile dreptunghice ΔABC $(AB < BC)$ şi ΔADC astfel încât $m(\angle ABC) = 90^\circ$, $m(\angle ADC) = 90^\circ$, B şi D de o parte şi de alta a dreptei AC şi $[AB] \equiv [CD]$. Dacă $BM \perp AC$, $M \in AC$ şi $m(\angle ABD) = 60^\circ$, demonstraţi că: $[BM$ este bisectoarea $\angle ABD$.

$(***)$

Soluţie. Din ΔABC, ΔCDA dreptunghice şi $[AB] \equiv [CD]$ (ipoteză), $[AC] \equiv [AC]$ (latură comună) rezultă că $\Delta ABC \equiv \Delta CDA$(I.C.) $\Rightarrow$ $[BC] \equiv [AD]$ (1), $\angle BCA \equiv \angle DAC$ şi $\angle BAC \equiv \angle DCA$. Atunci:
$m(\angle DAB) = m(\angle DAC) + m(\angle CAB) = m(\angle DAC) + m(\angle DCA) = 90^\circ$.
Din ΔABC, ΔBAD dreptunghice şi $[BC] \equiv [AD]$ (1), $[AB] \equiv [AB]$ (latură comună) $\Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta BAD$(C.C.) $\Rightarrow$ $\angle BAC \equiv \angle ABD$. Dar $m(\angle ABD) = 60^\circ$ şi atunci $m(\angle BAC) = 60^\circ$. Dacă $AC \cap BD = \{O\}$, în ΔAOB avem: $m(\angle AOB) = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$.
Din ΔBMA, ΔBMO dreptunghice şi $\angle BAM \equiv \angle BOM$ (au măsurile de 60°), $[MB] \equiv [MB]$ (latură comună) $\Rightarrow \Delta BMA \equiv \Delta BMO$(C.U.) $\Rightarrow \angle MBA \equiv \angle MBO$, dar $[BM \subset Int(\angle ABD) \Rightarrow [BM$ este bisectoarea $\angle ABD$.

Barem.

Figura………	1p
Compară ΔABC, ΔCDA dreptunghice şi obţine $[BC] \equiv [AD]$ …………………………………………………..	1p
Arată că $m(\angle BAD) = 90^\circ$ ………………………………………………………………………………………	1p
Compară ΔABC, ΔBAD dreptunghice şi obţine $\angle BAC \equiv \angle ABD$ …………………………………………….......	1p
Calculează $m(\angle BAC) = 60^\circ$ şi $m(\angle AOB) = 60^\circ$ ………………………………………………………........	1p
Compară ΔBMA, ΔBMO dreptunghice şi obţine $\angle MBA \equiv \angle MBO$ ……………………………………………...	1p
Finalizează $[BM$ este bisectoarea $\angle ABD$ ………………………………………………………………………	1p

4. Fie triunghiul ABC și punctele $M \in (AB)$, $P \in (AC)$ astfel încât $[BM] \equiv [CP]$. Dacă punctul Q este simetricul lui P față de mijlocul E al segmentului $[BC]$, să se arate că:

a) unghiurile ABQ și BAC sunt suplementare;

b) dreapta determinată de mijloacele segmentelor $[BC]$ și $[MP]$ este paralelă cu bisectoarea unghiului BAC.

$(***)$

Soluție. **a)** Comparăm ΔPEC și ΔQEB unde avem: $[PE] \equiv [EQ]$ (E mijloc $[QP]$), $\angle PEC \equiv \angle QEB$ (opuse la vârf) și $[CE] \equiv [EB]$ (E mijloc $[BC]$) rezultă că $\Delta PEC \equiv \Delta QEB$ (L.U.L.) $\Rightarrow$ $[PC] \equiv [QB]$ și $\angle PCE \equiv \angle QBE$ (1). Folosind (1)

$\Rightarrow m(\angle ABQ) + m(\angle BAC) = [m(\angle ABC) + m(\angle CBQ)] + m(\angle BAC) = m(\angle ABC) + m(\angle BCA) + m(\angle BAC) = 180°$ (2).

Deci unghiurile ABQ și BAC sunt suplementare.

b) Fie T mijlocul lui $[MP]$. Dar E mijlocul lui $[BC]$ și atunci $[TE]$ linie mijlocie în $\Delta PMQ \Rightarrow TE \parallel MQ$.

Fie $[AD]$ bisectoare în $\Delta ABC \Rightarrow \angle BAD \equiv \angle DAC$.

Din $[PC] \equiv [QB]$ și $[MB] \equiv [PC] \Rightarrow [MB] \equiv [BQ] \Rightarrow \Delta BMQ$ este isoscel cu baza $[MQ] \Rightarrow \angle BMQ \equiv \angle BQM$ (3).

În ΔBMQ avem: $m(\angle MBQ) + m(\angle BQM) + m(\angle BMQ) = 180°$, unde ținând cont de relațiile (2) și (3) obținem:

$$2 \cdot m(\angle BMQ) = 180° - m(\angle MBQ) = 180° - m(\angle ABQ) = m(\angle BAC) \Rightarrow m(\angle BMQ) = \frac{m(\angle BAC)}{2}.$$

Cum și $m(\angle BAD) = \dfrac{m(\angle BAC)}{2} \Rightarrow \angle BMQ \equiv \angle BAD$. Dar $\angle BMQ, \angle BAD$ sunt unghiuri corespondente formate de dreptele MQ și AD cu secanta AB și atunci obținem $MQ \parallel AD$. Din $TE \parallel MQ$ și $MQ \parallel AD \Rightarrow TE \parallel AD$

Barem.

Figura…………………………………………………………………………..……………………………	1p
a) Compară ΔPEC și ΔQEB și obține $[PC] \equiv [QB]$ și $\angle PCE \equiv \angle QBE$ …………..……………………………	1p
Calculează $m(\angle ABQ) + m(\angle BAC) = 180° \Rightarrow \angle ABQ, \angle BAC$ suplementare......……………………………….......	1p
b) $[TE]$ linie mijlocie în $\Delta PMQ \Rightarrow TE \parallel MQ$ ………………………………………………………………………..	1p
Arată că ΔBMQ este isoscel cu baza $[MQ]$ ……………..…………………………………………………..............	1p
Arată că $\angle BMQ \equiv \angle BAD \Rightarrow MQ \parallel AD$ ……………………………………………………………………...	1p
Finalizează $TE \parallel MQ$ și $MQ \parallel AD \Rightarrow TE \parallel AD$ ………………………………………………………………...	1p

Notă: Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.